Тел: **+7 (707) 900 92 67**
Почта: **saken.yan@yandex.com**

5 ЛЕКЦИЯ

САНДЫҚ ӘДІСТЕР

§5. Сандық әдіс арқылы интегралдау.

- Тік төртбұрыштар формуласы.
- Трапеция формуласы.

Жалпы түсінік..

Айталық, мынадай интегралды есептеу керек болсын

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

$[a, b]$ аралығындағы $f(x)$ функциясы үшін.

Математикалық талдау курсында Ньютон-Лейбниц формуласын қолданып интеграл мәнін табудың аналитикалық әдісі берілген болатын

$$I = F(b) - F(a)$$

бұнда $F(x) -$ берілген $f(x)$ функциясы үшін алғашқы функция.

Алайда, көптеген элементар $f(x)$ функциялары үшін, элементар $F(x) -$ алғашқы функциялар әр уақытта табыла бермейді. Сол себепті, $I -$ ді бұл әдіспен есептеп табу мүмкін емес. Мысалы мынадай интеграл ішіндегі функциялар үшін

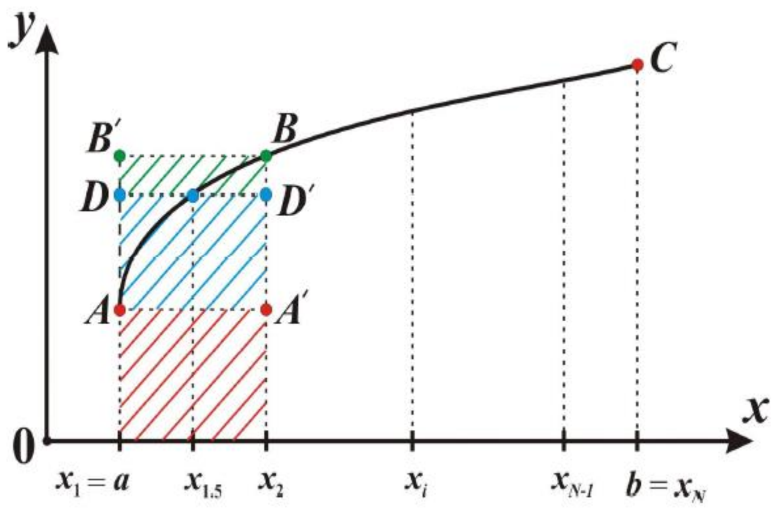
$$\int_a^b \frac{sin(x)}{x} dx, \qquad \int_a^b \frac{dx}{lnx}$$

Поэтому для вычисления I более эффективным является применение специальных приближенных формул−квадратурных формул или формул численного интегрирования.

Демек, $I -$ ді есептеу үшін арнайы сандық интегралдау формулаларын қолдану тиімдірек. Қазіргі таңда бірнеше сандық интегралдау әдістері бар. Солардың ең қарапайымдарын қарастырайық.

Тік төртбұрыштар формуласы.

Айталық, $f(x)$ −тің графигі сурет.1. де көрсетілгендей болсын.



Сурет.1.

$I = \int_a^b f(x)dx$ – Абсцисса осі мен функция графигі арасындағы облыстың ауданы болады. Сандық интегралдау келесі түрде орындалады:

1. $[a, b]$ аралығы $(N - 1)$ бөлікке бөлінеді, яғни, N түйіннен тұратын бөлім енгізіледі: x_i, $i = 1,2 \dots N$; $x_1 = a$; … ; $x_N = b$

Түйіндер бірдей қашықтықта орналасқан деп қарастырамыз:

$$h = \frac{b - a}{N - 1}$$

Содан кейін осының нәтижесінде алынған тік төртбұрыштарды қарастырамыз:

$$x_1 x_2 A' A \text{ немесе } x_1 x_2 B B'$$

немесе жаңа аралық түйінді еңгізіледі

$$x_{1.5} = \frac{x_1 + x_2}{2} = x_1 + \frac{h}{2}$$

Сәйкесінше, функция графигі мен абсцисса осі арасында пайда болған бүкіл фигураның ауданы кішігірім тіктөртбұрыштардың аудандарының қосындысына тең:

$a.$ Егер $x_1 x_2 A' A$ деген тіктөртбұрыштарды қарастыратын болсақ, онда сол жақ төртбұрыштардың формуласын аламыз:

$$I = \int_a^b f(x)dx = hf(x_1) + hf(x_2) + \dots + hf(x_{N-1}) = h \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)$$

b . Егер $x_1 x_2 A' A$ деген тіктөртбұрыштарды қарастыратын болсақ, онда оң жақ төртбұрыштардың формуласын аламыз:

$$I = \int_a^b f(x)dx = hf(x_2) + hf(x_3) + \dots + hf(x_N) = h \sum_{i=2}^{N} f(x_i)$$

$c.$ Егер $x_1 D D' x_2$ түріндегі тіктөртбұрыштарды қарастырсақ, онда орташа тіктөртбұрыштар формуласын аламыз:

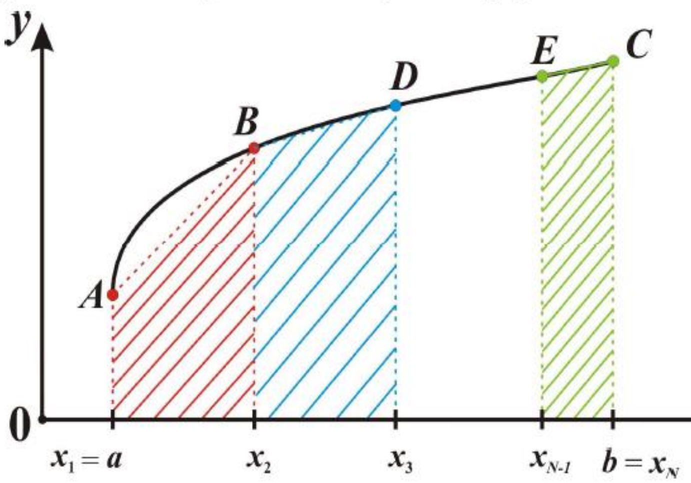
$$I = \int_a^b f(x)dx = hf\left(x_1 + \frac{h}{2}\right) + hf\left(x_2 + \frac{h}{2}\right) + \cdots + hf\left(x_{N-1} + \frac{h}{2}\right) = h\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i + \frac{h}{2})$$

Трапеция формуласы.

Айталық, $f(x)$ функциясының графигі Сурет.2. дегідей болсын. Енді $[a, b]$ аралығы $(N-1)$ бөлікке бөлеміз. Яғни, N түйіннен тұратын бөлім еңгіземіз: x_i, $i = 1,2 \dots N$; $x_1 = a$; … ; $x_N = b$

$$h = \frac{b-a}{N-1}$$

Әрі қарай, тіктөртбұрышды емес, трапецияны қарастырамыз. Мысалы. $aABx_2$, x_2BDx_3, және т. б. Бұл кезде функцияның графигі мен абсцисса осі арасында бүкіл фигураның ауданы кішігірім трапециялардың аудандарының қосындысына тең:



Сурет.2

$$S_{aABx_2} = h\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = \frac{h}{2}(f_1 + f_2).,$$

$$S_{x_2BDx_3} = \frac{h}{2}(f_2 + f_3).,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots.,$$

$$S_{x_{N-1}ECb} = \frac{h}{2}(f_{N-1} + f_N).$$

$$I = S_{aABx_2} + S_{x_2BDx_3} + \cdots + S_{x_{N-1}ECb} = \frac{h}{2}(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + \cdots 2f_{N-1} + f_N)$$

Жалпы түрі:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=2}^{N-1} f(x_i)\right)$$

Мысал.

Берілгені: $f(x) = 2x - 1 \quad x \in [1, 5].$

Табу керек: Интегралды $I = \int_1^5 f(x)dx$ тік төртбұрыштар мен трапеция формулалары арқылы при $N = 5$.

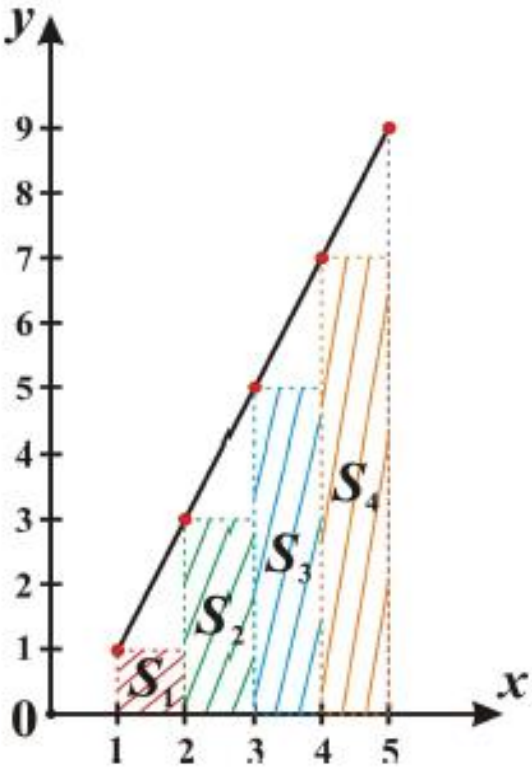
Шешім: Алдымен интегралды аналитикалық түрде есептеп алайық.

$$I = \int_a^b (2x-1)dx = (x^2 - x)|_1^5 = 20$$

Енді сандық әдістерді қарастырайық. Ол үшін алдымен интегралдау қадамын анықтайық

$$h = \frac{b-a}{N-1} = \frac{5-1}{5-1} = 1$$

a. Сол жақ тік төртбұрыштар әдісі.



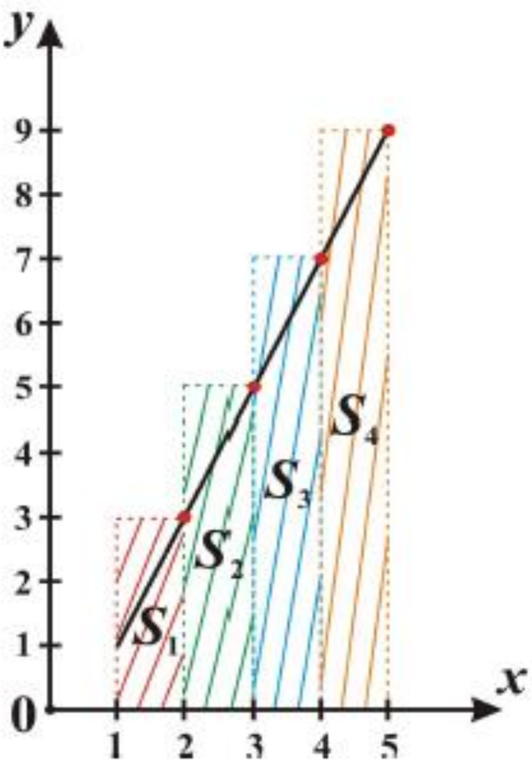
$$f(x) = y = 2x - 1$$

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1	3	5	7	9

$$S_1 = h \cdot y_1 = 1$$
$$S_2 = h \cdot y_2 = 3$$
$$S_3 = h \cdot y_3 = 5$$
$$S_4 = h \cdot y_4 = 7$$

$$I = \sum_i S_i = 16$$

b. Оң жақ тік төртбұрыштар әдісі.



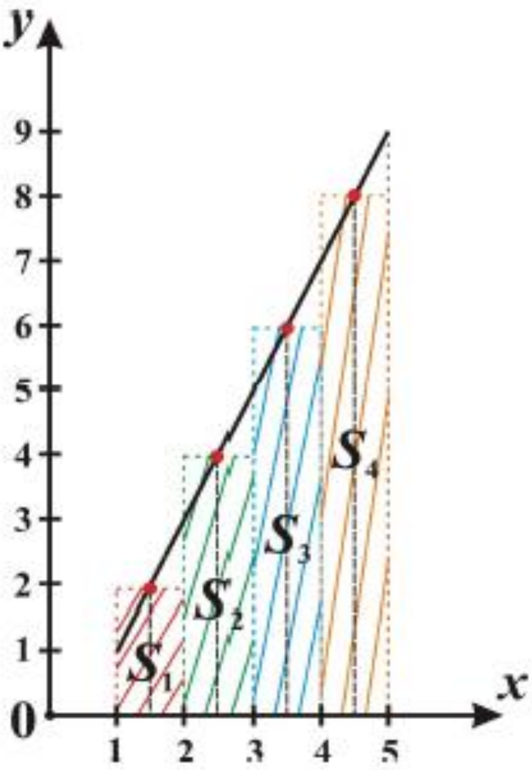
$$f(x) = y = 2x - 1$$

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1	3	5	7	9

$$S_1 = h \cdot y_2 = 2$$
$$S_2 = h \cdot y_3 = 5$$
$$S_3 = h \cdot y_4 = 7$$
$$S_4 = h \cdot y_5 = 9$$

$$I = \sum_i S_i = 24$$

c. **Орта тіктөртбұрыштар әдісі.**



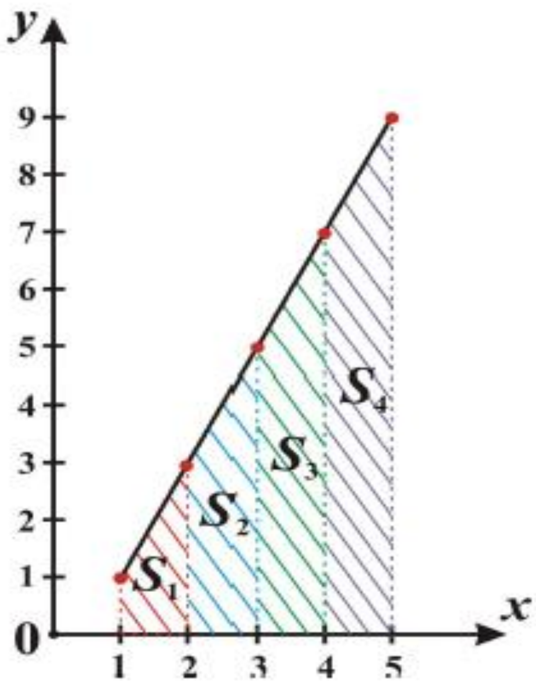
$$f(x) = y = 2x - 1$$

x_i	1.5	2.5	3.5	4.5
y_i	2	4	6	8

$$S_1 = f(x_{1.5}) \cdot h = 2$$
$$S_2 = f(x_{2.5}) \cdot h = 4$$
$$S_3 = f(x_{3.5}) \cdot h = 6$$
$$S_4 = f(x_{4.5}) \cdot h = 8$$

$$I = \sum_i S_i = 20$$

d. **Трапеция әдісі.**



$$f(x) = y = 2x - 1$$

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1	3	5	7	9

$$S_1 = \frac{h}{2}(f_1 + f_2) = 2$$

$$S_1 = \frac{h}{2}(f_2 + f_3) = 4$$

$$S_1 = \frac{h}{2}(f_3 + f_4) = 6$$

$$S_1 = \frac{h}{2}(f_4 + f_5) = 8$$

$$I = \sum_i S_i = 20$$

Енді осы мысалды *c-sharp* бағдарламалау тілінде жүзеге асырайық.

```
//Функция f=2x-1.
public static float Function(float x)
{
    return (2 * x - 1.0f);
}

public static void Main(string[] args)
{
    //Интегралдау шегі.
    float a = 1; float b = 5;
    //бөлу саны.
    int n = 5;
    //қадамы.
    float h = (b-a)/(n-1);

    Console.WriteLine("методом левых прямоугольников:");

    float S = 0;
    //Барлық кішігірім аудандардың қосындысын табу
    for (float x = a; x < b; x+=h)
        S = S + h * Function(x);

    Console.WriteLine("результат интегрирования равно {0}.", S);
    Console.ReadLine();
}
```

СРС.

Студент Симпсон формуласын (парабола әдісі) қарастырып, реферат жазып, оны univer арқылы жіберу керек.

Студент өз бетімен орындайтын тапсырма.

1. №5 дәріс материалдарын пайдаланып, интегралды табу үшін код жазыңыз. бөлім саны $N = 5$.

$$\int_{1}^{5} (2x - 1)dx$$

а. Оң жақ тік төртбұрыш әдісі.
б. Орташа тік төртбұрыштар әдісі.
в. Трапеция әдісі.
г. $N = 5,\ 10,\ 20, 50, 100,\ 1000$ үшін орындардыңыздар.

2. Бірінші есептегідей, мына интегралды есептеңіздер

$$\int_{0.1}^{0.5} \sqrt{\frac{exp(x)}{sin(x)} x^{\frac{3}{2}}} dx$$